ВВЕДЕНИЕ

"Математика учит точности мысли, подчинению логике доказательства, понятию строго обоснованной истины, а всё это формирует личность, пожалуй, больше, чем музыка".

Александр Данилович Александров

Впервые с проблемой вычисления площади фигур я столкнулся при решении различных задач, суть которых сводилась к тому, что требовалось найти площадь различных многоугольников, которых мы не рассматривали на уроках математики. Так как на уроке мы обычно выполняем решение в тетради, то я обратил внимание, что вычислить площадь того же квадрата помогают клетки, изображенные в тетради. Просматривая различную информацию в интернете, я натолкнулся на формулу, которая позволяет вычислить площадь фигуры, но только не по клеткам, а по их узлам. Впоследствии мне захотелось узнать, есть ли другие способы для вычисления площади различных фигур на клетчатой бумаге, какой из них проще, менее затратен по времени.

Гипотеза: если геометрическая фигура изображена на клетчатой бумаге, то ее площадь можно вычислить различными способами и убедиться, что результаты вычислений будут одинаковыми.

Актуальность выбранной темы: использование различных способов вычисления площади фигур на клетчатой бумаге усиливает интерес учащихся к математике и содействует развитию математических способностей школьников.

Цель работы: исследовать различные способы вычисления площадей фигур на клетчатой бумаге, сравнить полученные результаты.

Задачи исследования:

1. изучить литературу по исследуемой теме;
2. отобрать интересную и понятную информацию для исследования;
3. найти различные методы и приёмы вычисления площади фигур на клетчатой бумаге.
4. провести сравнительный анализ "плюсов" и "минусов" найденных способов.
5. провести эксперимент в 9 «д» классе об выявлении математических знаний у учащихся при вычислении площади фигур;
6. проанализировать и систематизировать полученную информацию.

Объект исследования: задачи на вычисление площади различных фигур на клетчатой бумаге.

Предмет исследования: способы вычисления площади фигур на клетчатой бумаге.

Методы и исследования: моделирование, сравнение, обобщение, аналогии, анализ и классификация информации.

Практическая значимость исследования: результаты исследования могут быть использованы при решении задач в старших классах, а так же при подготовке ОГЭ и ЕГЭ.

Из истории возникновения понятия "Площадь".

В повседневной жизни мы часто встречаемся с понятием площади. Мы говорим: площадь квартиры, площадь садового участка и т.д.

Необходимость в понятии «площадь» возникла из жизненных потребностей. В древности люди использовали для измерения длин те измерительные приборы, которые всегда были при себе.

Позже возникла потребность в измерении и сравнении разнообразных «фигур» (н.п. земельных участков). Было необходимо ввести величину, которая характеризовала бы величину той части плоскости, которую занимает фигура. Эту величину назвали площадью.

Измерение площадей является одним из самых древних разделов геометрии. В частности, название "геометрия" означает "землемерие", т.е. связано именно с измерением площадей. Основы этой науки были заложены в Древнем Египте, где после каждого разлива Нила приходилось заново производить разметку участков, покрытых плодоносным илом, т. е. вычислять их площади.

Вавилоняне, так же как и египтяне измеряли большей частью простейшие фигуры, встречающиеся при межевании земель, возведении стен и насыпей, строительстве плотин и каналов и т.п.

Сохранилось немало планов земельных угодий, разделенных на прямоугольники, трапеции и треугольники, а также планов различных строений, свидетельствующих, что вавилонский землемер или архитектор должен был хорошо чертить и проводить геометрические расчеты.

Многие ученые решали проблему вычисления площади фигуры. В историю с понятием площади вошли имена Евклида, Архимеда, Пифагора, Герона Александрийского, Рене Декарта, Пьера Ферма, Георга Пика и др. Ими открыто большое количество различных формул и способов для вычисления площади фигуры.

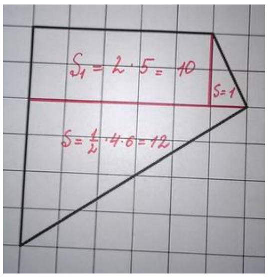
Способы вычисления площади фигуры на клетчатой бумаге.

При изучении вычисления площадей многоугольников на клетчатой бумаге я заметил, что все задачи строятся на понятии узла. Узел напоминает узел в рыболовной сетке - пересечение горизонтальных и вертикальных линий. Все

задачи достаточно разнообразны и занимательны, они заставляют думать, размышлять, анализировать, искать аналогии.

Рассмотрим вычисление площади одной и той же фигуры тремя способами и сравним результат вычисления.

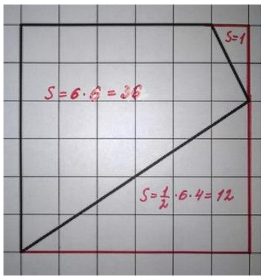
2.1. Три способа вычисления площади выпуклого многоугольника.



Разбиение. Смысл данного способа состоит в том, что многоугольник разрезается на прямоугольники и (или) прямоугольные треугольники с вершинами в узлах сетки.

Тогда площадь фигуры можно сосчитать по формуле:

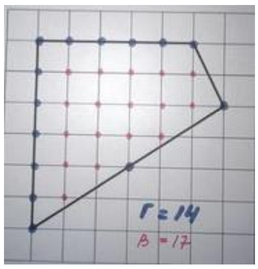
$S_{\text{ф}} = S_1 + S_2 + S_3 = 10 + 1 + 12 = 23$.



Дополнение до прямоугольника. Смысл данного способа – это дополнение многоугольника до прямоугольникатак, чтобы его стороны проходили через вершины четырехугольника, а затем вычитание лишних частей. Получим, что площадь фигуры равна:

$S_{\text{ф}} = S_{\text{пр}} - (S_1 + S_2) = 36 - (1 + 12) = 23$.

Формула Пика. Любая фигура изображенная на листе бумаги делит его на внутреннюю область и внешнюю, а еще есть граничные точки многоугольника. Нас интересуют внутренние узлы и узлы, которые лежат на границе многоугольника. Тогда формула выглядит так $S = В + Г/2 - 1$, где В - количество внутренних узлов, а Г - количество узлов на границе многоугольника.



Эта формула получила название формула Пика в честь австрийского математика Георга Пика которая появилась в его восьмистраничной работе 1899 года, опубликованной в Праге.

Используя рисунок В= 17, Г = 14, получаем

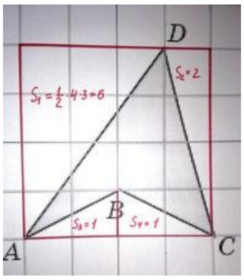
$S = 17 + 14/2 - 1 = 23$.

Вычисляя площадь выпуклого многоугольника тремя способами, я получил один и тот же результат.

2.2. Три способа вычисления площади невыпуклого многоугольника.

*Способ разбиения*не подходит для данной фигуры, т.к. невозможно разбить ее на прямоугольники и (или) прямоугольные треугольники с вершинами в узлах сетки.

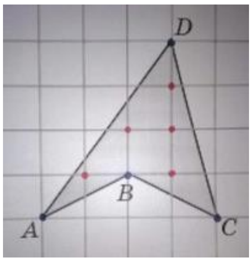
Дополнение до прямоугольника.



Достраивая многоугольник до прямоугольника, и отсекая лишние части, найдем площадь фигуры

$S_ф = S - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = 4^2 - (6 + 2 + 1 + 1) = 16 - 10 = 6.$

ФормулаПика.



При подсчете внутренних узлов многоугольника и узлов, лежащих на границе получим, что

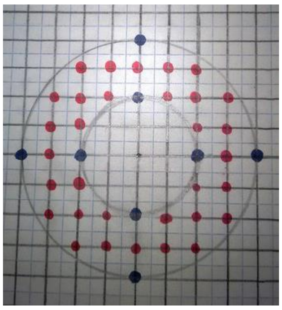
В = 5; Г = 4; S = 5 + 4/2 - 1 = 6.

И опять мы получили один и тот же результат.

2.3. Вычисление площади кольца по формуле Пика.

А если взять не многоугольник, а, например, кольцо и перенести его на клетчатую бумагу? Понятно, что первый и второй способы не удастся использовать. Применим формулу Пика и сравним полученный результат с результатом, полученным используя формулу для вычисления площади круга.

Возьмем кольцо, которое построим с помощью двух окружностей с радиусами R=4 и r = 2.



Вычислим площадь кольца с помощью формулы Пика:

В = 32, Г = 8, S= 32 + 4 - 1 = 35.

Вычислим площадь кольца по формуле площади круга, округлив число π до единиц.

$S = \pi R^2 - \pi r^2 = 3 * 16 - 3 * 4 = 48 - 12 = 36.$

Округлим теперь π до десятых:

$S = \pi R^2 - \pi r^2 = 3,1 * 16 - 3,1 * 4 = 49,6 - 12,4 = 37,2.$

А если округлить число π до сотых, то получим:

$S = \pi R^2 - \pi r^2 = 3,14 * 16 - 3,14 * 4 = 50, 24 - 12,56 = 37,68.$

Сравнив результаты можно сделать вывод, что существует погрешность в вычислении площади по формуле Пика и чем точнее число π, тем она больше. Следовательно, данную формулу можно применять только для вычисления площадей многоугольников.

2.4. Вычисление площади фигуры, используя карту произвольной местности по формуле Пика.

Если посмотреть на карту любой территории, то я заметил, что ее можно легко представить в виде многоугольника, перенести на клетчатую бумагу и сосчитать ее площадь. Для этого я в качестве примера выбрал вычисление площади территории Дагестана

(Приложение 1).

По конфигурации территория Дагестана — вытянутый в меридиональном направлении многоугольник. Максимальное расстояние с юга на север — 420 км, с запада на восток — 216 км.

Площадь Дагестана (из источника, взятого в сети Интернет) составляет 50270 км^2.

Я перенес карту Дагестана на тетрадный листок в клетку и вычислил площадь, используя формулу Пика.

У меня получилось, что В = 270; Г = 38; S = 270 + 38/2 - 1 = 288

На карте с юга на север максимум укладывается приблизительно 32 клетки.

Далее я нашел сколько километров составляет сторона 1 клетки 420 : 32 = 13,125 км, значит площадь 1 клетки составляет 13,125^2 км^2 = 172,2656 км^2.

Вычислил площадь территории Дагестана

S = 288 * 172,2656 = 49613,0688 км^2.

Погрешность получилась минимальная, следовательно, формулу Пика можно применять для оценивания площади любой местности.

Исследование возможности использования способов вычисления площадей фигур, изображенных на клетчатой поверхности.

3.1. Сравнительный анализ способов нахождения площади многоугольника на клетчатой бумаге.

1. Разбиение.

Этот способ прост в подсчёте площадей фигур, которые разбиваются на прямоугольники и (или) прямоугольные треугольники с вершинами в узлах сетки. К ним относятся выпуклые многоугольники.

К минусам можно отнести то, что в использовании этого способа приходится производить множество действий, а так же невозможность подсчёта площади фигур, которые не разбиваются на прямоугольники и (или) прямоугольные треугольники с вершинами в узлах сетки.

2. Дополнение до прямоугольника.

Этот способ так же прост в подсчёте при вычислении площади при небольшом количестве фигур, площадь которых необходимо отнять.

Минусы этого способа - сложность подсчёта площади многоугольников необычной формы, большое количество фигур, площадь которых необходимо отнять, а так же невозможность подсчёта площади фигур, не относящихся к многоугольникам.

3. Формула Пика.

К плюсам я отнес то, что легко вычисляется площадь многоугольника с необычной формой, в отличие от предыдущих способов, краткость формулы, а так же возможность вычисления приближенного значения площади местности по карте, представив ее в виде многоугольника, перенеся ее на клетку.

Минусами этого способа считаю сложность вычисления площади фигуры с большим количеством узлов, а так же, если в фигуре есть «спорные» узлы (узлы, лежащие близко к стороне многоугольника). Вычисляя площадь фигур, не относящихся к многоугольникам, результат получается не точным.

3.2. Результаты эксперимента, проведенного в 9 "Д" классе.

Сделав сравнительный анализ, я провел эксперимент в своем классе с целью развития познавательной активности на уроках математики и выявления математических знаний у учащихся при вычислении площади фигур. Мной был проведен элемент урока в 9 "Д" классе. Я предложил своим одноклассникам вычислить площадь многоугольника тремя способами: "Разбиение", Дополнение до прямоугольника" и по формуле Пика (Приложение 2).

Ребята с интересом отнеслись к моему заданию, но не у всех получились одинаковые результаты. Хотя формула Пика и легка при вычислении площади, у многих сложность возникла при нахождении узлов на границе фигуры и внутри нее. Так же у некоторых затруднение возникло при дополнении до прямоугольника. А вот "Разбиение" на прямоугольные треугольники и прямоугольники получилось у всех. Кстати, ребята так же обратили внимание, что способ разбиения невозможен при вычислении площади невыпуклого многоугольника, а вычисляя площадь невыпуклого многоугольника по формуле Пика ребята обнаружили «спорный узел».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучив различные источники, выяснилось, что существует различные способы вычисления фигур по клеткам, но для меня были интересны и понятны три: разбиение, дополнение до прямоугольника и вычисления по формуле Пика.

Моя гипотеза – о том, что если геометрическая фигура изображена на клетчатой бумаге, то ее площадь можно вычислить различными способами и убедиться, что результаты вычислений будут одинаковыми, частично подтвердилась. Рассмотрев все три способа, я пришел к выводу, что не для всякой фигуры можно приметить каждый из них. У каждого из них есть свои плюсы и минусы.

Все три способа можно применить только для выпуклых многоугольников, перенеся их на клетчатую поверхность.

Формула Пика интересна своей простотой. И пусть она при вычислении площадей, не относящихся к многоугольникам, дает приближенное значение, можно легко оценить площадь той или иной территории на карте.

Проведя занятие в 9 "Д" классе я обратил внимание, что вычислять площадь многоугольников по клеткам ребятам интересно, но не хватает практики, одного занятия недостаточно. Нужно закреплять навык вычисления площадей. Думаю, что ребятам так же будет интересно попробовать вычислить площадь местности по карте.

Задачи на клетчатой бумаге встречаются в заданиях ЕГЭ и ОГЭ, поэтому я считаю, что такие задания нужно включать в элемент урока, так как это поможет им при подготовке к экзаменам.

Список использованных источников и литературы:

1. Горина Л.В. Одна за всех… Формула Пика. Материал для самообразования учащихся.// Основа, №3 (27), с. 24-28. Режим доступа: http://gorinalw.3dn.ru/OSNOVA/osnova-3-2013.pdf
2. Екимова М. А. ,Кукин Г. П. Задачи на разрезание. М.: МЦНМО, 2002. Режим доступа: http://www.math.ru/lib/files/pdf/kukin.pdf
3. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание./Пер. с англ. Ю.Н. Сударева. Под ред. и с послесл. И.М. Яглома. М.: Мир.-1977. – 256 с.
4. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 7-9 классы: учеб.для общеобразоват. Организаций. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2014. -383 с.
5. Трошин В. В. Занимательные дидактические материалы по математике. Сборник заданий. Выпуск 2. – М.: Глобус, 2008.
6. Геометрия на клетчатой бумаге. Малый МЕХмат МГУ. Режим доступа: http://mmmf.msu.ru/archive/20082009/KanunnikovKuznetsov/2.html
7. Жарковская Н. М., Рисс Е. А. Геометрия клетчатой бумаги. Формула Пика // Математика, 2009, № 17, с. 24-25.

Интернет ресурсы:

http://www.pppa.ru/additional/01geodesy/06/02topo.php

http://ru.wikihow.comhttp://knowledge.allbest.ru/mathematics/3c0b65635b3bd68b4c43b89521306d27_0.html

http://argonavt.narod.ru/Kenpark.html

http://infourok.ru/issledovatelskaya-rabota-vichislenie-ploschadi-mnogougolnika-na-kletchatoy-bumage-910671.html

https://docviewer.yandex.ru